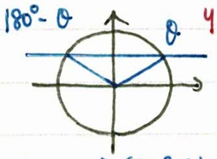
1998年　東大数学　文系第3問 ①

補 $\sin\theta=\sin\varphi$, $\cos\theta=\cos\varphi$ の解

$\sin\theta=\sin\varphi \iff \begin{cases}\theta=\varphi+360^\circ\times n\\ \theta=180^\circ-\varphi+360^\circ\times n\end{cases}$ ... (*)

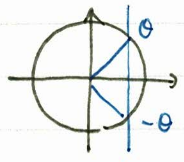
θとφにおいて、y座標が一致



$\sin\theta$ と $\sin(180^\circ-\theta)$ が一致。

$\cos\theta=\cos\varphi \iff \begin{cases}\theta=\varphi+360^\circ\times n\\ \theta=-\varphi+360^\circ\times n\end{cases}$ ... (**)

θとφにおいて、x座標が一致



$\cos\theta$ と $\cos(-\theta)$ が一致。

これを頻繁に使います。

(i) $\sin y=|\sin 4x|$ において、(*) を使いたいので、絶対値を外す。

(i) $0^\circ\leqq 4x\leqq 180^\circ \iff 0^\circ\leqq x\leqq 45^\circ$ のとき。

$|\sin 4x|=\sin 4x$ ← 絶対値がそのまま外れる

$\sin y=\sin 4x$

↓ (*)

$y=\begin{cases}4x+360^\circ\times n\\ 180^\circ-4x+360^\circ\times n\end{cases}$

$0^\circ\leqq y\leqq 90^\circ$ なので、$\begin{cases}\underline{4x}+360^\circ\times n\\ \underline{180^\circ-4x}+360^\circ\times n\end{cases}$ ← ココが $0^\circ\sim 90^\circ$ と同じ動径になればよい。

のうち、$0^\circ\sim 90^\circ$ になる n を探す。

(i)−①

$0^\circ\leqq 4x\leqq 90^\circ \iff 0^\circ\leqq x\leqq 22.5^\circ$ のとき。

$y=4x$ ← $y=4x+360^\circ\times n$ (上) の $n=0$

(i)−②

$90^\circ\leqq 4x\leqq 180^\circ \iff 22.5^\circ\leqq x\leqq 45^\circ$ のとき

$y=180^\circ-4x$ ← $y=180^\circ-4x+360^\circ\times n$ (下) の $n=0$

(ii) $180^\circ\leqq 4x\leqq 360^\circ \iff 45^\circ\leqq x\leqq 90^\circ$ のとき。

$|\sin 4x|=-\sin 4x$ ← 絶対値が負で外れる

$=\sin(-4x)$ ← $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

よって

$\sin y=\sin(-4x)$

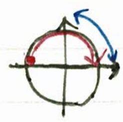
↓ (*)

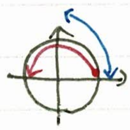
$y=\begin{cases}\underline{-4x}+360^\circ\times n\\ \underline{180^\circ+4x}+360^\circ\times n\end{cases}$ ← $0^\circ\leqq y\leqq 90^\circ$ と同じ動径になるものを探す

このうち、$0^\circ\leqq y\leqq 90^\circ$ を満たす解を探す。

オマケ

$4x$	$-4x$ (上)	$180^\circ+4x$ (下)





$180^\circ\leqq 4x\leqq 360^\circ$	$-360^\circ\leqq -4x\leqq -180^\circ$	$360^\circ\leqq 180^\circ+4x\leqq 540^\circ$

(ii)−①

$180^\circ\leqq 4x\leqq 270^\circ \iff 45^\circ\leqq x\leqq 67.5^\circ$ のとき。

$y=180^\circ+4x-360^\circ$ ← $y=180^\circ+4x+360^\circ\times n$ (下) の $n=-1$

(ii)−②

$270^\circ\leqq 4x\leqq 360^\circ \iff 67.5^\circ\leqq x\leqq 90^\circ$ のとき

$y=-4x+360^\circ$ ← $y=-4x+360^\circ\times n$ (上) の $n=1$

以上より　$\sin y=|\sin 4x|$ を解くと、

$$y=\begin{cases}4x & (0^\circ\leqq x\leqq 22.5^\circ \text{ のとき})\\ -4x+180^\circ & (22.5^\circ\leqq x\leqq 45^\circ \text{ のとき})\\ 4x-180^\circ & (45^\circ\leqq x\leqq 67.5^\circ \text{ のとき})\\ -4x+360^\circ & (67.5^\circ\leqq x\leqq 90^\circ \text{ のとき})\end{cases}$$

1998年　東大数学　文系第3問 ②

次に、$\cos y = |\cos 4x|$ を解く。

まず、絶対値を外したい。
すると (※※) が使える。

(iii) $0° \leqq 4x \leqq 90°$, $270° \leqq 4x \leqq 360°$

$\Leftrightarrow$ $0° \leqq x \leqq 22.5°$, $67.5° \leqq x \leqq 90°$ のとき、

$|\cos 4x| = \cos 4x$ ← 絶対値がそのまま外れる。

$\cos y = \cos 4x$　↓(※※)

$$y = \begin{cases} 4x + 360° \times n \\ -4x + 360° \times n \end{cases}$$

前と同じく 0°〜90° の動径となるものを探す

$0° \leqq y \leqq 90°$ を満たす解を探す。

(iii) − ①

$0° \leqq 4x \leqq 90°$ $\Leftrightarrow$ $0° \leqq x \leqq 22.5°$ のとき、

$y = 4x$ ← $y = 4x + 360° \times n$ (上) の $n = 0$

(iii) − ②

$270° \leqq 4x \leqq 360°$ $\Leftrightarrow$ $67.5° \leqq x \leqq 90°$ のとき

$y = -4x + 360°$ ← $y = -4x + 360° \times n$ (下) の $n = 1$

(iv) $90° \leqq 4x \leqq 270°$ のとき、

$|\cos 4x| = -\cos 4x$ ← 絶対値を負で外す

$= \cos(4x + 180°)$　$\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$

よって

$\cos y = \cos(4x + 180°)$　↓(※※)

$$y = \begin{cases} 4x + 180° + 360° \times n \\ -(4x + 180°) + 360° \times n \end{cases}$$

0°〜90° の動径になるものを探す。

$0° \leqq y \leqq 90°$ の解を探す

(iv) − ①

$90° \leqq 4x \leqq 180°$ $\Leftrightarrow$ $22.5° \leqq x \leqq 45°$ のとき

$y = -4x + 180°$ ← $y = -(4x + 180°) + 360° \times n$ (下) の $n = 1$

(iv) − ②

$180° \leqq 4x \leqq 270°$ $\Leftrightarrow$ $45° \leqq x \leqq 67.5°$ のとき。

$y = 4x - 180°$ ← $y = 4x + 180° + 360° \times n$ (上) の $n = -1$

以上より、$\cos y = |\cos 4x|$ を解くと、

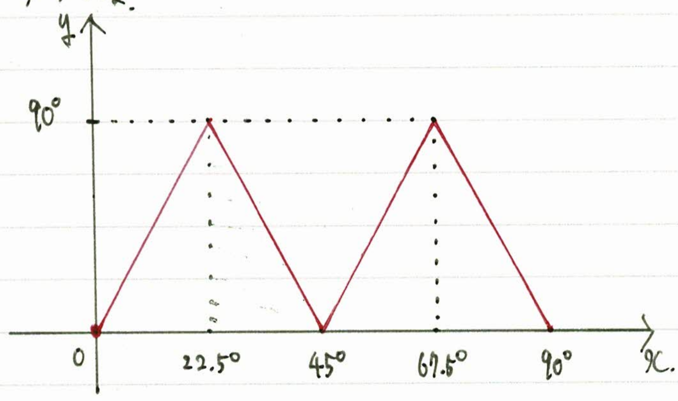
$$y = \begin{cases} 4x & (0° \leqq x \leqq 22.5° \text{ のとき}) \\ -4x + 180° & (22.5° \leqq x \leqq 45° \text{ のとき}) \\ 4x - 180° & (45° \leqq x \leqq 67.5° \text{ のとき}) \\ -4x + 360° & (67.5° \leqq x \leqq 90° \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで、前ページの $\sin y = |\sin 4x|$ の解と見比べると、ピッタリ一致しているのがわかる。

$\sin y = |\sin 4x|$ と $\cos y = |\cos 4x|$ の解が一致しているため、

$$y = \begin{cases} 4x & (0° \leqq x \leqq 22.5° \text{ のとき}) \\ -4x + 180° & (22.5° \leqq x \leqq 45° \text{ のとき}) \\ 4x - 180° & (45° \leqq x \leqq 67.5° \text{ のとき}) \\ -4x + 360° & (67.5° \leqq x \leqq 90° \text{ のとき}) \end{cases}$$

グラフは、



1998年　東大数学　文系第3問 ③

(2)

(1) で得られた y と x の関係式の右辺を $f(x)$ とおく

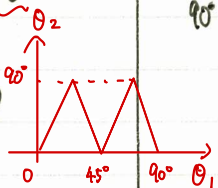
すなわち、

$$f(x)\begin{cases} 4x & (0° \leqq x \leqq 22.5° \text{ のとき}) \\ -4x+180° & (22.5° \leqq x \leqq 45° \text{ のとき}) \\ 4x-180° & (45° \leqq x \leqq 67.5° \text{ のとき}) \\ -4x+360° & (67.5° \leqq x \leqq 90° \text{ のとき}) \end{cases}$$

簡単にするため $f(x)$ でおく。

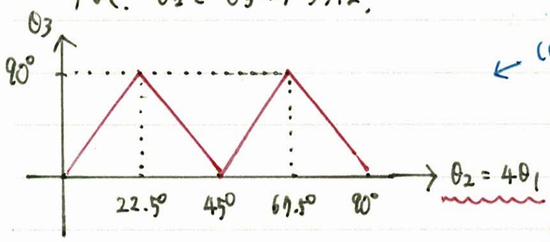
すると、 $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$ と表現できる。

$\theta_1 = \alpha$ と θ_2 のグラフは、(1)の結論のグラフそのものである。



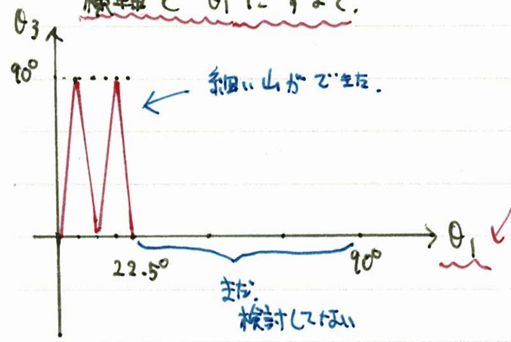
(i) $0° \leqq \theta_1 \leqq 22.5°$ のとき、 $\theta_2 = 4\theta_1$ であり
$0° \leqq \theta_2 \leqq 90°$ を満たす。

すると、 θ_2 と θ_3 のグラフは、



← (1)と同じグラフ

横軸を θ_1 にすると、



← 細い山ができた。

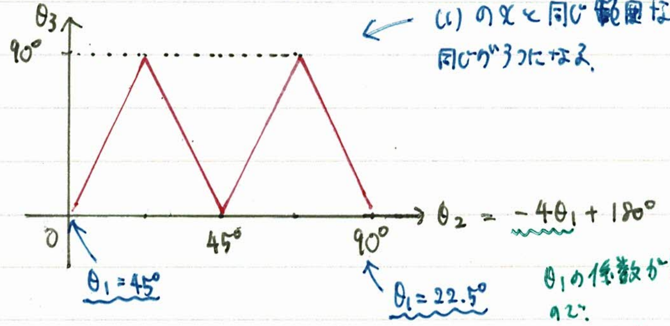
まだ検討してない

横軸が4分の1に圧縮された

(ii) $22.5° \leqq \theta_1 \leqq 45°$ のとき、 $\theta_2 = -4\theta_1 + 180°$ であり
$0° \leqq \theta_2 \leqq 90°$ を満たす

θ_2 と θ_3 のグラフは、

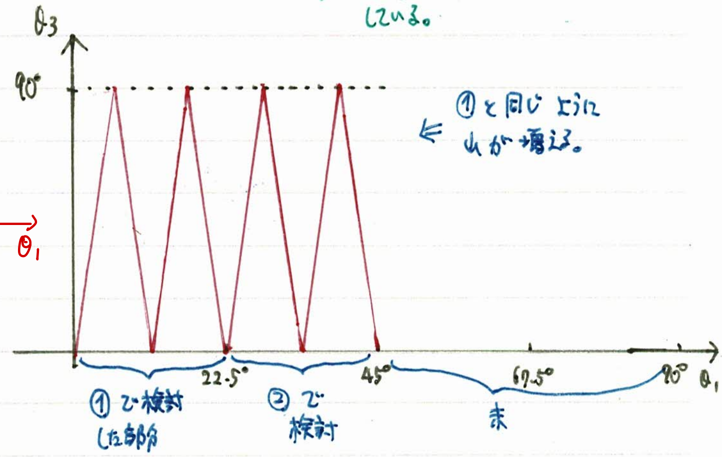
$0° \leqq \theta_2 \leqq 90°$ と (1) の x と同じ範囲なので同じグラフになる。



θ_1 の係数が負なので、 θ_1 の増減は θ_2 の ↕ と逆向き（あまり気にしなくてよい）

θ_1 の向き、AA が AA と左右が反転している。

横軸を θ_1 にすると

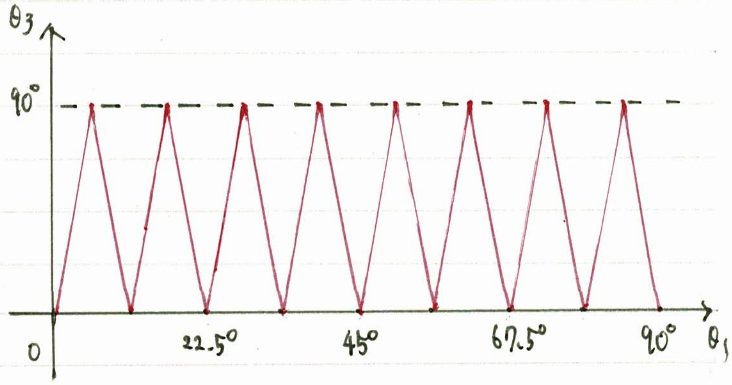


← ①と同じように山が増える。

以下、 $45° \leqq \theta_1 \leqq 67.5°$、 $67.5° \leqq \theta_1 \leqq 90°$ の時も同様に考えると、同じような結論が得られて「山」の数が増える

つまり

θ_3 と θ_1 のグラフは



θ_1 と θ_2 は山2つ。

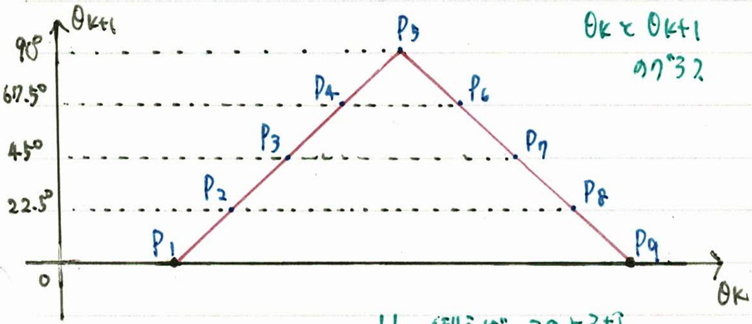
θ_1 と θ_3 は山8つ　山が4倍になった。

Date

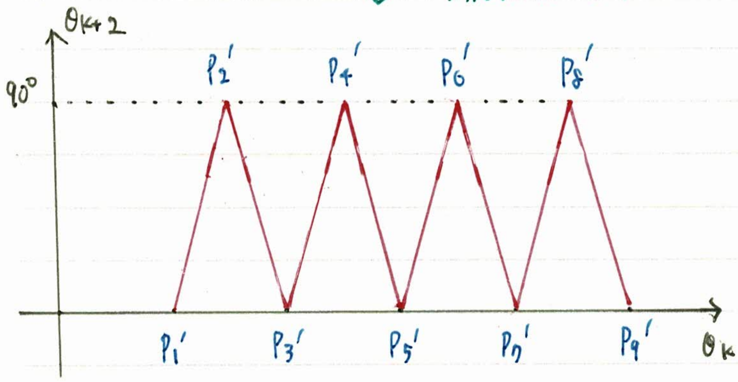
1998年　東大数学　文系第3問④

前ページで、θ_1とθ_2の関係から、θ_1とθ_3の関係を見出したが、山が4倍になった。

θ_4, θ_5, θ_6… と考察しても同様のことが起こる。

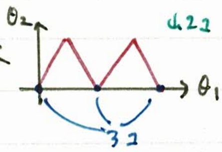


⇓ 例えば、このような対応関係になる。



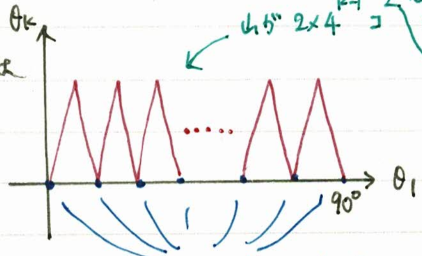
よって、山の数が4倍ずつになることを考えると、$\theta_k = 0$となる$\theta_1 = \alpha$の数は、$2 \times 4^{k-1} + 1$個。

θ_1とθ_2では



θ_kとθ_1では

山が$2 \times 4^{k-1}$コ　（初項2、公比4の等比数列）



山の数より1つ多いので、$2 \times 4^{k-1} + 1$個。

オマケ

$a_{n+1} = f(a_n)$ のように、次々と $f(x)$ の関数を代入していく。

（合成という）

このような問題の場合、等比数列的に図形が変化していくパターンの問題があります。

2004年、第3問が、少し簡単な類題です。

（解の個数が等比数列になっている。）